a

Odejmowanie

Skoro nauczyliśmy się powiększać jedną liczbę o drugą, to teraz wypadałoby powiedzieć o pomniejszaniu jednej o drugą. Istotę odejmowania słusznie ujął Sidney Polak: „Popatrz jak wszystko szybko się zmienia, coś jest, a później tego nie ma”.[[1]](#footnote-1)

Baba z wozu, koniom lżej

Intuicje

Zastanawiałeś się kiedyś, czemu koniom lżej? W chwili początkowej mamy wóz, a na nim babę. Biedne konie męczą się z ciągnięciem ciężaru wozu i damy słusznego rozmiaru. Następnie obserwujemy, że baba z wozu. Wtedy ciężar, który konie mają dźwigać, ogranicza się jedynie do wozu, a więc koniom lżej[[2]](#footnote-2).

Wróćmy lepiej do kulek na stole[[3]](#footnote-3). Powiedzmy, że rozłożyliśmy 7 kulek.

Stwierdziwszy, że położenie tych kulek przeczy naszemu poczuciu estetyki, zabieramy 4 kulki.

Nietrudno zauważyć, że zostały nam 3 kulki. Od 7 kulek zabieramy 4 kulki, otrzymujemy 3 kulki. Matematycznie zapiszemy to tak:

Znaczek podobnie jak jest symbolem matematycznym. Sam znaczek nazywa się „minus”, ale w działaniu czytamy go jako „odjąć”[[4]](#footnote-4). Znaczy on tyle, że od tego, co po lewej stronie, zabieramy (czyli odejmujemy) to, co po prawej stronie. Symbol jest Ci już znany. Mówi on tyle, że 7 kulek – 4 kulki to to samo, co 3 kulki.

Odejmowanie nie musi odnosić się jedynie do kulek. Napotkamy je w wielu innych sytuacjach.

* Pasterz miał 10 owiec. Pewnego dnia zły wilk zjadł 3 owce. Pozostało 7 owiec.
* Pan Janusz niósł na urodziny pana Marka 5 butelek Piccolo[[5]](#footnote-5). Zamyślony teorią odejmowania potknął się o krawężnik i stłukł 2 butelki. Do celu doniósł jedynie 3 butelki.
* Kupiłeś 30 ciastek z zamiarem spędzenia miłego wieczoru. Nie wiesz, że kiedy czytasz „Oblicze całki”, młodsza siostra zjada Ci wszystkie ciastka. Najadłeś się zamiarem.

Ponieważ jesteśmy profesjonalistami, umiemy wykonywać odejmowanie nie tylko na kulkach, owcach, butelkach i ciastkach, ale też na liczbach jako takich. Powyższe równości można więc zapisać ogólniej:

W swoim czasie uzupełnię definicję formalną

Nazewnictwo

Intuicje

Podobnie, jak w przypadku dodawania określamy składniki i sumę, tak w odejmowaniu matematycy pokusili się o wyróżnienie poszczególnych składowych działania. Tu jednak ma znaczenie, czy liczba stoi przed znakiem –, czy po nim. Liczbę, od której *odejmujemy* (po lewej), nazywamy *odjemną*, a liczbę, którą odejmujemy (po prawej), nazywamy *odjemnikiem*. Wynik odejmowania określamy jako *różnica*.

* W działaniu odjemną jest 10, odjemnikiem jest 4, a różnicą 6.
* W działaniu odjemną jest 12, odjemnikiem jest 7, a różnicą 5.
* W działaniu odjemną jest 8, odjemnikiem 4, a różnicą 4.

Odejmowanie jako odwrotność dodawania

Intuicje

Przyjrzyjmy się kulkom raz jeszcze.

Obrazek ten może nas zainspirować[[6]](#footnote-6) do stwierdzenia, że:

4 kulki i 6 kulek to razem 10 kulek

Kiedy od 10 kulek zabierzemy 6 kulek, to pozostaną nam 4 kulki

Kiedy od 10 kulek zabierzemy 4 kulki, to pozostanie nam 6 kulek

Nasuwa się wyraźna zależność pomiędzy dodawaniem i odejmowaniem. Kiedy napotkamy problem, próbując odjąć , możemy zadać sobie pytanie „co należy dodać do 4, by otrzymać 10?”. Stwierdzimy wtedy, że od 4 do 10 brakuje jeszcze 6.

Spostrzeżenie bywa bardzo praktyczne.

* Za złe zachowanie pensja pana Janusza spada ze 120 zł do 110 zł za dzień. Zdruzgotany pan Janusz zastanawia się, jak bardzo jest stratny, czyli jaka jest różnica między jego poprzednią a obecną pensją. Napotykając problem z obliczeniem , pan Janusz zastanawia się, ile musiałby dołożyć do 110, aby otrzymać 120:

Stwierdza, że różnica wynosi 10 zł.

* Gutek zbiera na wymarzony zestaw Lego, który kosztuje 120 zł. Ciężką pracą[[7]](#footnote-7) zarobił 40 zł i zastanawia się, ile jeszcze musi uzbierać. Stoi więc przed problemem:

Odpowiedź 80 to wynik odejmowania 120 – 40.

Z powodu występowania takiej zależności mówimy, że odejmowanie jest działaniem *odwrotnym* do dodawania.

Własności odejmowania

Rozszerzenie

Przy wprowadzaniu nazw odjemna i odjemnik dumnie ogłosiliśmy, że w odejmowaniu ma znaczenie, czy liczba stoi przed znakiem , czy po nim. Wyobraź sobie[[8]](#footnote-8), że w stadzie jest 10 owiec, a wilk zjada spośród nich dwie. Pozostaje 8 owiec. i z tym większego problemu nie ma[[9]](#footnote-9). Teraz wyobraź sobie, że w stadzie są dwie owce, a wilk zjada spośród nich 10. Sytuacja taka najpewniej pozwoliłaby rozwiązać problem głodu na świecie, jednak rzeczywistość nie jest łaskawa. Jak widać, to nie to samo, co , a więc odejmowanie nie jest przemienne.

Zastanówmy się jeszcze, czy odejmowanie jest łączne. Gdyby tak było, działanie

można by wykonać na dwa sposoby, otrzymując ten sam wynik:

Wynikiem jest 1

Wynikiem jest 5

Ponieważ wyniki są różne, odejmowanie nie jest łączne. Reguła mówi, że gdy napotkamy wiele znaków w jednym działaniu, należy je rozpracowywać od lewej do prawej. Licząc poprawnie: .

Odejmowanie w słupku

Warsztat

Podobnie jak w przypadku dodawania, matematycy pokusili się na wynalezienie metody *odejmowania w słupku*[[10]](#footnote-10) zwanej też *odejmowaniem pisemnym*.

W przypadku liczb jednocyfrowych odejmowanie nie powinno sprawiać większych trudności – na dobry początek warto korzystać z faktu, że odejmowanie jest odwrotne do dodawania. Gdy zastanawiamy się, ile jest , musimy znaleźć taką liczbę, że gdy dodamy do niej , otrzymamy . W razie potrzeby można nawet skorzystać z tabliczki dodawania:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| **8** | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| **9** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Patrzymy na kolumnę zatytułowaną jako „3”. Jedziemy wzrokiem wzdłuż niej, aż napotkamy interesujący nas wynik – 7. Sprawdzamy, że 7 występuje w wierszu oznaczonym jako „4”. Oznacza to tyle, że , a więc .

Prawdziwa zabawa zaczyna się przy odejmowaniu większych liczb. Odejmowania w słupku nauczymy się na przykładzie . Zaczynamy podobnie jak z dodawaniem – piszemy liczby jedna pod drugą z wyrównaniem do prawej i podkreślamy.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 6 | 9 | 8 |
| - | 1 | 2 | 7 | 4 |
|  |  |  |  |  |

Teraz odejmujemy po kolei cyfry jedności, cyfry dziesiątek, cyfry setek i cyfry tysięcy. Wyniki zapisujemy odpowiednio pod kreską

* , więc pod 8 i 4 piszemy 4.
* , więc pod 9 i 7 piszemy 2.
* , więc pod 6 i 2 piszemy 4.
* , więc pod 3 i 1 piszemy 2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 6 | 9 | 8 |
| - | 1 | 2 | 7 | 4 |
|  | 2 | 4 | 2 | 4 |

Odczytujemy, że wynik odejmowania to 2424. Ten przykład był prosty tylko na zachętę. Teraz czas na intensywne wrażenia: obliczmy .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 7 | 3 | 7 |
| - |  | 6 | 8 | 3 |
|  |  |  |  |  |

Odejmujemy cyfrę jedności od cyfry jedności: .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 7 | 3 | 7 |
| - |  | 6 | 8 | 3 |
|  |  |  |  | 4 |

Odejmujemy cyfrę dziesiątek od cyfry dziesiątek: no i mamy problem. Ciężko byłoby zabrać od czegoś małego coś dużego[[11]](#footnote-11). Robimy taki trik: trójkę zwiększamy o 10 (robimy z niej 13) kosztem cyfry po lewej – siódemkę zmniejszamy o 1 (robimy z niej 6).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 6 | 13 |  |
|  | 2 | ~~7~~ | ~~3~~ | 7 |
| - |  | 6 | 8 | 3 |
|  |  |  |  | 4 |

Po takim zabiegu reszta działań jest łatwa:

* , więc pod 13 i 8 piszemy 5.
* , więc pod 6 i 6 piszemy 0.
* 2 jest sama, więc pozostaje bez zmian.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 6 | 13 |  |
|  | 2 | ~~7~~ | ~~3~~ | 7 |
| - |  | 6 | 8 | 3 |
|  | 2 | 0 | 5 | 4 |

Wynikiem jest 2054. Największym problemem przy odejmowaniu w słupku jest wykonywanie „pożyczania”, czyli właśnie tego triku z trzynastką i szóstką. Czasami sprawy bywają jeszcze bardziej skomplikowane. Zobaczmy, jak odjąć 1358 – 489.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 5 | 8 |
| - |  | 4 | 8 | 9 |
|  |  |  |  |  |

Próbujemy odjąć . Ponieważ są problemy, robimy pożyczkę i odejmujemy .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 4 | 18 |
|  | 1 | 3 | ~~5~~ | ~~8~~ |
| - |  | 4 | 8 | 9 |
|  |  |  |  | 9 |

Teraz pora na . Widzimy, że znowu są problemy, więc dokonujemy kolejnej pożyczki i odejmujemy .

Word genialnie przekreślił 4. Mam nadzieję że ostatecznie będzie to lepiej widać.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 14 |  |
|  |  | 2 | ~~4~~ | 18 |
|  | 1 | ~~3~~ | ~~5~~ | ~~8~~ |
| - |  | 4 | 8 | 9 |
|  |  |  | 6 | 9 |

Odejmowanie ponownie wymaga zaciągnięcia pożyczki.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 12 | 14 |  |
|  | 0 | ~~2~~ | ~~4~~ | 18 |
|  | ~~1~~ | ~~3~~ | ~~5~~ | ~~8~~ |
| - |  | 4 | 8 | 9 |
|  |  | 8 | 6 | 9 |

Z zapożyczonej jedynki nic już nie zostało. Skoro tak, to jest ostatecznym wynikiem. Zróbmy jeszcze jeden przykład. Jeśli go zrozumiesz, odejmowanie w słupku nie będzie miało przed Tobą tajemnic.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  |  |  |  |

Na dobry początek dostajemy . Widać, że musimy zaciągnąć pożyczkę. Ale nawet zaciąganie pożyczki jest kłopotliwe. Z zera w cyfrach jedności chcemy uczynić kosztem zera w cyfrach dziesiątek. Wtedy musielibyśmy zmniejszyć je o 1… ale nie potrafimy zmniejszyć liczby 0. W takim razie zaciągnięcie pożyczki… wymaga zaciągnięcia pożyczki. Z zera w cyfrach dziesiątek czynimy 10 kosztem zera w cyfrach setek. Niestety ta pożyczka wymaga zaciągnięcia jeszcze jednej pożyczki. Ostatecznie 0 w cyfrach setek stanie się 10 kosztem 1, która stanie się 0.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 10 |  |  |
|  | ~~1~~ | ~~0~~ | 0 | 0 |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  |  |  |  |

Teraz możemy wykonać pożyczkę o krok wcześniej

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 9 |  |  |
|  | 0 | ~~10~~ | 10 |  |
|  | ~~1~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | 0 |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  |  |  |  |

I jeszcze o krok wcześniej:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 9 | 9 |  |
|  | 0 | ~~10~~ | ~~10~~ | 10 |
|  | ~~1~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  |  |  |  |

Wreszcie możemy wykonać odejmowanie i otrzymać wynik 321.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 9 | 9 |  |
|  | 0 | ~~10~~ | ~~10~~ | 10 |
|  | ~~1~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  | 3 | 2 | 1 |

Może odejmowanie w słupku nie jest najprostszą metodą, jaką w życiu widziałeś, ale na pocieszenie: odejmowanie w słupku jest głównie po to, żeby męczyć nim dzieci w podstawówce. Na kolejnych etapach edukacji każdy wypracowuje własne metody wykonywania obliczeń i najczęściej potrafi odejmować nawet duże liczby w pamięci. A jeśli nie, to przecież zawsze jest kalkulator.

Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Kolejność wykonywania działań]

Jeśli jesteś dociekliwy, możemy przyjrzeć się metodzie odejmowania w słupku i zobaczyć, dlaczego te wszystkie pożyczki działają poprawnie. Weźmy pod lupę przykład .

Rozbijamy na cyfry

Porządkujemy cyfry

Odejmujemy cyfry jedności

Zaciągamy pożyczkę

Odejmujemy cyfry dziesiątek

Odejmujemy cyfry setek

Spójrzmy jeszcze na 1000 – 679.

Rozbijamy na cyfry

Porządkujemy cyfry

Zaciągamy „trzecią” pożyczkę

Zaciągamy „drugą” pożyczkę

Zaciągamy „pierwszą” pożyczkę

Odejmujemy wszystkie cyfry

Bardziej formalnie i ogólnie:

Dowód

[wymagana znajomość tematu: Algebra]

Później

1. Sidney Polak stwierdził również, że „człowiek jest tylko sumą oddechów”. Skoro już umiesz dodawać, jesteś w stanie ocenić słuszność jego śmiałej teorii. [↑](#footnote-ref-1)
2. Co kończy dowód. [↑](#footnote-ref-2)
3. Wiem, że nie mogłeś się doczekać. [↑](#footnote-ref-3)
4. Jak dorośniesz, zrozumiesz różnicę. [↑](#footnote-ref-4)
5. Lekcja zawiera lokowanie produktu. [↑](#footnote-ref-5)
6. Chłoń go pełną piersią. [↑](#footnote-ref-6)
7. Zwyczajowo zwaną kieszonkowym [↑](#footnote-ref-7)
8. Chyba że jesteś wrażliwy. Wtedy po prostu to przeczytaj. [↑](#footnote-ref-8)
9. Pomijając fakt, że dwie owce właśnie zostały zagryzione. [↑](#footnote-ref-9)
10. Nie bój się, będzie dobrze. [↑](#footnote-ref-10)
11. Chyba że jesteś poborcą podatkowym. [↑](#footnote-ref-11)