a

Odejmowanie

Skoro nauczyliśmy się powiększać jedną liczbę o drugą, to teraz wypadałoby powiedzieć o pomniejszaniu jednej o drugą. Istotę odejmowania słusznie ujął Sidney Polak: „Popatrz jak wszystko szybko się zmienia, coś jest, a później tego nie ma”.[[1]](#footnote-1)

Baba z wozu, koniom lżej

Intuicje

Zastanawiałeś się kiedyś, czemu koniom lżej? W chwili początkowej mamy wóz, a na nim babę. Biedne konie męczą się z ciągnięciem ciężaru wozu i damy słusznego rozmiaru. Następnie obserwujemy, że baba z wozu. Wtedy ciężar, który konie mają dźwigać, ogranicza się jedynie do wozu, a więc koniom lżej[[2]](#footnote-2).

Wróćmy lepiej do kulek na stole[[3]](#footnote-3). Powiedzmy, że rozłożyliśmy 7 kulek.

Stwierdziwszy, że położenie tych kulek przeczy naszemu poczuciu estetyki, zabieramy 4 kulki.

Nietrudno zauważyć, że zostały nam 3 kulki. Od 7 kulek zabieramy 4 kulki, otrzymujemy 3 kulki. Matematycznie zapiszemy to tak:

7 kulek – 4 kulki = 3 kulki

Znaczek – podobnie jak + jest symbolem matematycznym. Sam znaczek nazywa się „minus”, ale w działaniu czytamy go jako „odjąć”[[4]](#footnote-4). Znaczy on tyle, że od tego, co po lewej stronie, zabieramy (czyli odejmujemy) to, co po prawej stronie. Symbol = jest Ci już znany. Mówi on tyle, że 7 kulek – 4 kulki to to samo, co 3 kulki.

Odejmowanie nie musi odnosić się jedynie do kulek. Napotkamy je w wielu innych sytuacjach.

* Pasterz miał 10 owiec. Pewnego dnia zły wilk zjadł 3 owce. Pozostało 7 owiec.

10 owiec – 3 owce = 7 owiec

* Pan Janusz niósł na urodziny pana Marka 5 butelek Piccolo[[5]](#footnote-5). Zamyślony teorią odejmowania potknął się o krawężnik i stłukł 2 butelki. Do celu doniósł jedynie 3 butelki.

5 butelek – 2 butelki = 3 butelki

* Kupiłeś 30 ciastek z zamiarem spędzenia miłego wieczoru. Nie wiesz, że kiedy czytasz „Oblicze całki”, młodsza siostra zjada Ci wszystkie ciastka. Najadłeś się zamiarem.

30 ciastek – 30 ciastek = 0 ciastek

Ponieważ jesteśmy profesjonalistami, umiemy wykonywać odejmowanie nie tylko na kulkach, owcach, butelkach i ciastkach, ale też na liczbach jako takich. Powyższe równości można więc zapisać ogólniej:

7 – 4 = 3

10 – 3 = 7

5 – 2 = 3

30 – 30 = 0

W swoim czasie uzupełnię definicję formalną

Nazewnictwo

Intuicje

Podobnie, jak w przypadku dodawania określamy składniki i sumę, tak w odejmowaniu matematycy pokusili się o wyróżnienie poszczególnych składowych działania. Tu jednak ma znaczenie, czy liczba stoi przed znakiem –, czy po nim. Liczbę, od której *odejmujemy* (po lewej), nazywamy *odjemną*, a liczbę, którą odejmujemy (po prawej), nazywamy *odjemnikiem*. Wynik odejmowania określamy jako *różnica*.

odjemna – odjemnik = różnica

* W działaniu 10 – 4 = 6 odjemną jest 10, odjemnikiem jest 4, a różnicą 6.
* W działaniu 12 – 7 = 5 odjemną jest 12, odjemnikiem jest 7, a różnicą 5.
* W działaniu 4 = 8 – 4 odjemną jest 8, odjemnikiem 4, a różnicą 4.

Odejmowanie jako odwrotność dodawania

Intuicje

Przyjrzyjmy się kulkom raz jeszcze.

Obrazek ten może nas zainspirować[[6]](#footnote-6) do stwierdzenia, że:

4 kulki i 6 kulek to razem 10 kulek

4 + 6 = 10

Kiedy od 10 kulek zabierzemy 6 kulek, to pozostaną nam 4 kulki

10 – 6 = 4

Kiedy od 10 kulek zabierzemy 4 kulki, to pozostanie nam 6 kulek

10 – 6 = 4

Nasuwa się wyraźna zależność pomiędzy dodawaniem i odejmowaniem. Kiedy napotkamy problem, próbując odjąć 10 – 4, możemy zadać sobie pytanie „co należy dodać do 4, by otrzymać 10?”. Stwierdzimy wtedy, że od 4 do 10 brakuje jeszcze 6.

Spostrzeżenie bywa bardzo praktyczne.

* Za złe zachowanie pensja pana Janusza spada ze 120 zł do 110 zł za dzień. Zdruzgotany pan Janusz zastanawia się, jak bardzo jest stratny, czyli jaka jest różnica między jego poprzednią a obecną pensją. Napotykając problem z obliczeniem 120 – 110 pan Janusz zastanawia się, ile musiałby dołożyć do 110, aby otrzymać 120:

110 + € = 120

Stwierdza, że różnica wynosi 10 zł.

* Gutek zbiera na wymarzony zestaw Lego, który kosztuje 120 zł. Ciężką pracą[[7]](#footnote-7) zarobił 40 zł i zastanawia się, ile jeszcze musi uzbierać. Stoi więc przed problemem:

40 + € = 120

Odpowiedź 80 to wynik odejmowania 120 – 40.

Z powodu występowania takiej zależności mówimy, że odejmowanie jest działaniem *odwrotnym* do dodawania.

Własności odejmowania

Rozszerzenie

Przy wprowadzaniu nazw odjemna i odjemnik dumnie ogłosiliśmy, że w odejmowaniu ma znaczenie, czy liczba stoi przed znakiem –, czy po nim. Wyobraź sobie[[8]](#footnote-8), że w stadzie jest 10 owiec, a wilk zjada spośród nich dwie. Pozostaje 8 owiec. 10 – 2 = 8 i z tym większego problemu nie ma[[9]](#footnote-9). Teraz wyobraź sobie, że w stadzie są dwie owce, a wilk zjada spośród nich 10. Sytuacja taka najpewniej pozwoliłaby rozwiązać problem głodu na świecie, jednak rzeczywistość nie jest łaskawa. Jak widać, 10 – 2 to nie to samo, co 2 – 10, a więc odejmowanie nie jest przemienne.

Zastanówmy się jeszcze, czy odejmowanie jest łączne. Gdyby tak było, działanie

8 – 5 – 2

można by wykonać na dwa sposoby, otrzymując ten sam wynik:

8 – 5 = 3

3 – 2 = 1

Wynikiem jest 1

5 – 2 = 3

8 – 3 = 5

Wynikiem jest 5

Ponieważ wyniki są różne, odejmowanie nie jest łączne. Reguła mówi, że gdy napotkamy wiele znaków – w jednym działaniu, należy je rozpracowywać od lewej do prawej. Licząc poprawnie: 8 – 5 – 2 = 1.

Odejmowanie w słupku

Warsztat

Podobnie jak w przypadku dodawania, matematycy pokusili się na wynalezienie metody *odejmowania w słupku*[[10]](#footnote-10) zwanej też *odejmowaniem pisemnym*.

W przypadku liczb jednocyfrowych odejmowanie nie powinno sprawiać większych trudności – na dobry początek warto korzystać z faktu, że odejmowanie jest odwrotne do dodawania. Gdy zastanawiamy się, ile jest 7 – 3, musimy znaleźć taką liczbę, że gdy dodamy do niej 3, otrzymamy 7. W razie potrzeby można nawet skorzystać z tabliczki dodawania:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| **8** | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| **9** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Patrzymy na kolumnę zatytułowaną jako „3”. Jedziemy wzrokiem wzdłuż niej, aż napotkamy interesujący nas wynik – 7. Sprawdzamy, że 7 występuje w wierszu oznaczonym jako „4”. Oznacza to tyle, że 3 + 4 = 7, a więc 7 – 3 = 4.

Prawdziwa zabawa zaczyna się przy odejmowaniu większych liczb. Odejmowania w słupku nauczymy się na przykładzie 3698 – 1274. Zaczynamy podobnie jak z dodawaniem – piszemy liczby jedna pod drugą z wyrównaniem do prawej i podkreślamy.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 6 | 9 | 8 |
| - | 1 | 2 | 7 | 4 |
|  |  |  |  |  |

Teraz odejmujemy po kolei cyfry jedności, cyfry dziesiątek, cyfry setek i cyfry tysięcy. Wyniki zapisujemy odpowiednio pod kreską

* 8 – 4 = 4, więc pod 8 i 4 piszemy 4.
* 9 – 7 = 2, więc pod 9 i 7 piszemy 2.
* 6 – 2 = 4, więc pod 6 i 2 piszemy 4.
* 3 – 1 = 2, więc pod 3 i 1 piszemy 2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 | 6 | 9 | 8 |
| - | 1 | 2 | 7 | 4 |
|  | 2 | 4 | 2 | 4 |

Odczytujemy, że wynik odejmowania to 2424. Ten przykład był prosty tylko na zachętę. Teraz czas na intensywne wrażenia: obliczmy 2737 – 683.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 7 | 3 | 7 |
| - |  | 6 | 8 | 3 |
|  |  |  |  |  |

Odejmujemy cyfrę jedności od cyfry jedności: 7 – 3 = 4.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 7 | 3 | 7 |
| - |  | 6 | 8 | 3 |
|  |  |  |  | 4 |

Odejmujemy cyfrę dziesiątek od cyfry dziesiątek: 3 – 8 = … no i mamy problem. Ciężko byłoby zabrać od czegoś małego coś dużego[[11]](#footnote-11). Robimy taki trik: trójkę zwiększamy o 10 (robimy z niej 13) kosztem cyfry po lewej – siódemkę zmniejszamy o 1 (robimy z niej 6).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 6 | 13 |  |
|  | 2 | ~~7~~ | ~~3~~ | 7 |
| - |  | 6 | 8 | 3 |
|  |  |  |  | 4 |

Po takim zabiegu reszta działań jest łatwa:

* 13 – 8 = 5, więc pod 13 i 8 piszemy 5.
* 6 – 6 = 0, więc pod 6 i 6 piszemy 0.
* 2 jest sama, więc pozostaje bez zmian.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 6 | 13 |  |
|  | 2 | ~~7~~ | ~~3~~ | 7 |
| - |  | 6 | 8 | 3 |
|  | 2 | 0 | 5 | 4 |

Wynikiem jest 2054. Największym problemem przy odejmowaniu w słupku jest wykonywanie „pożyczania”, czyli właśnie tego triku z trzynastką i szóstką. Czasami sprawy bywają jeszcze bardziej skomplikowane. Zobaczmy, jak odjąć 1358 – 489.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 5 | 8 |
| - |  | 4 | 8 | 9 |
|  |  |  |  |  |

Próbujemy odjąć 8 – 9. Ponieważ są problemy, robimy pożyczkę i odejmujemy 18 – 9 = 9.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 4 | 18 |
|  | 1 | 3 | ~~5~~ | ~~8~~ |
| - |  | 4 | 8 | 9 |
|  |  |  |  | 9 |

Teraz pora na 4 – 8. Widzimy, że znowu są problemy, więc dokonujemy kolejnej pożyczki i odejmujemy 14 – 8 = 6.

Word genialnie przekreślił 4. Mam nadzieję że ostatecznie będzie to lepiej widać.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 14 |  |
|  |  | 2 | ~~4~~ | 18 |
|  | 1 | ~~3~~ | ~~5~~ | ~~8~~ |
| - |  | 4 | 8 | 9 |
|  |  |  | 6 | 9 |

Odejmowanie 2 – 4 ponownie wymaga zaciągnięcia pożyczki.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 12 | 14 |  |
|  | 0 | ~~2~~ | ~~4~~ | 18 |
|  | ~~1~~ | ~~3~~ | ~~5~~ | ~~8~~ |
| - |  | 4 | 8 | 9 |
|  |  | 8 | 6 | 9 |

Z zapożyczonej jedynki nic już nie zostało. Skoro tak, to 869 jest ostatecznym wynikiem. Zróbmy jeszcze jeden przykład. Jeśli go zrozumiesz, odejmowanie w słupku nie będzie miało przed Tobą tajemnic.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | 0 | 0 |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  |  |  |  |

Na dobry początek dostajemy 0 – 9. Widać, że musimy zaciągnąć pożyczkę. Ale nawet zaciąganie pożyczki jest kłopotliwe. Z zera w cyfrach jedności chcemy uczynić 10 kosztem zera w cyfrach dziesiątek. Wtedy musielibyśmy zmniejszyć je o 1… ale nie potrafimy zmniejszyć liczby 0. W takim razie zaciągnięcie pożyczki… wymaga zaciągnięcia pożyczki. Z zera w cyfrach dziesiątek czynimy 10 kosztem zera w cyfrach setek. Niestety ta pożyczka wymaga zaciągnięcia jeszcze jednej pożyczki. Ostatecznie 0 w cyfrach setek stanie się 10 kosztem 1, która stanie się 0.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 10 |  |  |
|  | ~~1~~ | ~~0~~ | 0 | 0 |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  |  |  |  |

Teraz możemy wykonać pożyczkę o krok wcześniej

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 9 |  |  |
|  | 0 | ~~10~~ | 10 |  |
|  | ~~1~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | 0 |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  |  |  |  |

I jeszcze o krok wcześniej:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 9 | 9 |  |
|  | 0 | ~~10~~ | ~~10~~ | 10 |
|  | ~~1~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  |  |  |  |

Wreszcie możemy wykonać odejmowanie i otrzymać wynik 321.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 9 | 9 |  |
|  | 0 | ~~10~~ | ~~10~~ | 10 |
|  | ~~1~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| - |  | 6 | 7 | 9 |
|  |  | 3 | 2 | 1 |

Może odejmowanie w słupku nie jest najprostszą metodą, jaką w życiu widziałeś, ale na pocieszenie: odejmowanie w słupku jest głównie po to, żeby męczyć nim dzieci w podstawówce. Na kolejnych etapach edukacji każdy wypracowuje własne metody wykonywania obliczeń i najczęściej potrafi odejmować nawet duże liczby w pamięci. A jeśli nie, to przecież zawsze jest kalkulator.

Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Kolejność wykonywania działań]

Jeśli jesteś dociekliwy, możemy przyjrzeć się metodzie odejmowania w słupku i zobaczyć, dlaczego te wszystkie pożyczki działają poprawnie. Weźmy pod lupę przykład 2737 – 683.

2737 – 683 =

= 2000 + 700 + 30 + 7 – (600 + 80 + 3) = Rozbijamy na cyfry

= 2000 + 700 + 30 + 7 – 600 – 80 – 3 =

= 2000 + (700 – 600) + (30 – 80) + (7 – 3) = Porządkujemy cyfry

= 2000 + (700 – 600) + (30 – 80) + 4 = Odejmujemy cyfry jedności

= 2000 + (600 + 100 – 600) + (30 – 80) + 4 = Zaciągamy pożyczkę

= 2000 + (600 – 600) + (100 + 30 – 80) + 4 =

= 2000 + (600 – 600) + (130 – 80) + 4 =

= 2000 + (600 – 600) + 50 + 4 = Odejmujemy cyfry dziesiątek

= 2000 + 0 + 50 + 4 = Odejmujemy cyfry setek

= 2054

Spójrzmy jeszcze na 1000 – 679.

1000 – 679 =

= 1000 + 0 + 0 + 0 – (600 + 70 + 9) = Rozbijamy na cyfry

= 1000 + 0 + 0 + 0 – 600 – 70 – 9 =

= 1000 + (0 – 600) + (0 – 70) + (0 – 9) = Porządkujemy cyfry

= 0 + (1000 – 600) + (0 – 70) + (0 – 9) = Zaciągamy „trzecią” pożyczkę

= 0 + (900 + 100 – 600) + (0 – 70) + (0 – 9) = Zaciągamy „drugą” pożyczkę

= 0 + (900 – 600) + (100 – 70) + (0 – 9) =

= 0 + (900 – 600) + (90 + 10 – 70) + (0 – 9) = Zaciągamy „pierwszą” pożyczkę

= 0 + (900 – 600) + (90 – 70) + (10 – 9) =

= 0 + 300 + 20 +1 = Odejmujemy wszystkie cyfry

= 321

Bardziej formalnie i ogólnie:

Dowód

[wymagana znajomość tematu: Algebra]

Później

1. Sidney Polak stwierdził również, że „człowiek jest tylko sumą oddechów”. Skoro już umiesz dodawać, jesteś w stanie ocenić słuszność jego śmiałej teorii. [↑](#footnote-ref-1)
2. Co kończy dowód. [↑](#footnote-ref-2)
3. Wiem, że nie mogłeś się doczekać. [↑](#footnote-ref-3)
4. Jak dorośniesz, zrozumiesz różnicę. [↑](#footnote-ref-4)
5. Lekcja zawiera lokowanie produktu. [↑](#footnote-ref-5)
6. Chłoń go pełną piersią. [↑](#footnote-ref-6)
7. Zwyczajowo zwaną kieszonkowym [↑](#footnote-ref-7)
8. Chyba że jesteś wrażliwy. Wtedy po prostu to przeczytaj. [↑](#footnote-ref-8)
9. Pomijając fakt, że dwie owce właśnie zostały zagryzione. [↑](#footnote-ref-9)
10. Nie bój się, będzie dobrze. [↑](#footnote-ref-10)
11. Chyba że jesteś poborcą podatkowym. [↑](#footnote-ref-11)